**第八周习题课 空间曲面，曲线，Taylor公式，极值，最值**

****

**一．几何应用1. 空间曲面**

**(1)空间曲面的表达式**

显函数表示： 

隐函数表示: 

**(2)空间曲面的切平面与法线**

* 空间曲面由显函数表示，设 ，空间曲面过切平面方程为



法线方程是 

法向量为　　　　　　　　

* 若曲面由隐函数表示, 曲面过切平面方程为



法线方程为



法向量　　　　　　　

问题：**条件是什么？**

1. 求曲面:上切平面与直线平行的切点的轨迹。

解: (1) 直线的方向向量：.

点处曲面的法向：.

(2)所求轨迹：,

轨迹为空间曲线为 ，或

1. 证明球面与锥面正交.

证明 所谓两曲面正交是指它们在交点处的法向量互相垂直.

记

曲面上任一点处的法向量是

 或者

曲面上任一点处的法向量为.

设点是两曲面的公共点，则在该点有



即在公共点处两曲面的法向量相互垂直，因此两曲面正交.

1. 通过曲面上点的切平面（ B ）

（）通过轴； （）平行于轴；

（）垂直于轴； （），，都不对.

解题思路 令.则在其上任一点的法向量为



于是在点的法向量为



因此, 切平面的方程为. 在的法向量垂直于轴，从而切平面平行于轴．但是由于原点不在切平面，故切平面不含轴.

1. 在椭球面上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

解：椭球面在此点的法线矢量为，设该点为，则有

该点坐标为

二．**空间曲线的切线和法平面**

**(1)空间曲面的表达式**

* 空间曲面的参数方程: 

参数方程又可以写作 

**(2)空间曲线的切线与法平面**

* 空间曲面的参数方程表示，其切线为　　

切向量为：　　　　　　　　　　

法平面为：　　　　 

1. 求螺线 ；,在点 处的切线与法平面.

解 由于点对应的参数为，所以螺线在处的切向量是



因而所求切线的参数方程为 

法平面方程为 .

1. 设曲线，求曲线上一点，使曲线在该点的切线平行于平面．

解：曲线的切线方向为．曲线在该点的切线平行于平面可知





所求的点为．

**三．Taylor公式**

1. 函数  在  点的二阶Taylor多项式为 。

【答案】

1. 二元函数  在点  处的二阶Taylor多项式为 。

【答案】



**四．极值**

1. 求函数的所有局部极值.

解 求偏导数得，解  ,

得到9个驻点：

 

求二阶偏导数得



在上述每个点计算得到下表：

 由极值的充分条件可知，函数在点取局部极小值，



取局部极大值，其它点均为鞍点（非极值点）.

**五．最值**

1. 求原点到曲面的最短距离．

解：这个问题可看作条件极值问题：。

我们用Lagrange乘子法来直接求解这个问题。作Lagrange函数。令



由上述第三个方程可知或. 讨论如下：

情形。 联立前两个方程得 。不难解得唯一的解：,。

将,代入第四个方程得。这就得到问题的两个驻点 和.

情形。 联立前两个方程得 。

1. 当时，容易解得。代入方程 得。无实数解。
2. 当时，由方程组  立刻得到

。即。代入方程 得。其解为。由此得到两个驻点： ，。

综上我们得到四个驻点：，，，。

这四个点与原点的距离分别为，，，。容易验证，这四个之的最小值是.因此，曲面上的两个点和与原点的距离是所求得最

短距离。解答完毕。

1. 求在所围闭区域上的最大值和最小值．

解：（１）先求开区域内的最大值．



驻点，在内的驻点为．

（２）三条边界上的驻点

（i）

将代入



在边界上的驻点为，经检验，这个点在的边界上．

（ii）

将代入，．

（iii）

作拉格伦日函数　　　



驻点在的边界上．

现有驻点，加上三个角点以及在边界上的．

函数在有界闭区域上连续，必有最大值，而且最大值必为上述六个点之一，以及边界上．计算函数在六个点上的值，以及边界的值，可知，。

1. 设在上有二阶连续偏导数，在内满足，且在上， ，证明：当时， 。（提示：可用反证法证明）

证明：反证法：假设存在点满足且。

由条件：在上， 可知，在上的连续函数在区域的最小值点一定发生在区域的内部，因此一定是极小值点，矩阵正定或半正定，这与



矛盾。假设不成立，即当时， 。